Gyakorló feladatok II.

1. Feladat

$\dot{x}_1 = -121x_1 - 2120x_2 - 2000x_3 + u$

$\dot{x}_2 = x_1$

$\dot{x}_3 = x_2$

$y = 20000x_3$

Adja meg a fenti differenciál egyenlettel jellemzett rendszer:

a) A, B, C, D rendszer-mátrixait
b) átviteli függvényét

a.,

Kiegészítve az eredeti egyenletet:

$\dot{x}_1 = -121x_1 - 2120x_2 - 2000x_3 + 1u$

$\dot{x}_2 = 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0u$

$\dot{x}_3 = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0u$

$y = 0x_1 + 0x_2 + 20000x_3 + 0u$

Ebből:

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-121 & -2120 & -2000\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \qquad A = \begin{bmatrix}-121 & -2120 & -2000\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 0 & 20000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + 0\cdot u \qquad C = \begin{bmatrix}0 & 0 & 20000\end{bmatrix} \qquad D = 0$$

b.,

Az eredeti egyenlet Laplace transzformáltjából kiindulva:

$sx_1 = -121x_1 - 2120x_2 - 2000x_3 + u$

$sx_2 = x_1 \quad \longrightarrow \quad x_1 = s^2x_3$

$sx_3 = x_2$

$$y = 20000x_3 \quad \longrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{20000}y$$

A második és harmadik egyenletet behelyettesítve az első egyenletbe:

$$sx_1 = -121x_1 \quad - 2120x_2 - 2000x_3 + u$$

$$s^3x_3 = -121s^2x_3 - 2120sx_3 - 2000x_3 + u$$

$$s^3\frac{1}{20000}y = -\frac{121}{20000}ys^2 - \frac{2120}{20000}ys - \frac{2000}{20000}y + u$$

$$y(s^3 + 121s^2 + 2120s + 2000) = 20000u$$

$$w(s) = \frac{y}{u} = \frac{20000}{s^3 + 121s^2 + 2120s + 2000}$$

2. Feladat

Adja meg a

$$w(s) = \frac{20000}{(s^2 + 101s + 100)(s + 20)}$$

átviteli függvényű rendszer:

a) impulzusválaszának időfüggvényét
b) egységugrás-válaszának időfüggvényét

a.,

A megoldáshoz a kimeneti jel Laplace transzformáltjának részlettörtekre bontásával jutunk. Az egységimpulzus u(t) = δ(t) bemeneti jel Laplace transzformáltja u(s) = 1.

$$y(s) = w(s)u(s) = \frac{20000}{(s^2 + 101s + 100)(s + 20)} \cdot 1$$

A függvényből egy pólus rögtön meghatározható: $p_1 = -20$. Az

$$s^2 + 101s + 100 = 0$$

egyenlet megoldásából a további két pólus is adódik:

$p_2 = -1$ $\quad$ $p_3 = -100$

Ezzel:

$$y(s) = \frac{20000}{(s + 1)(s + 20)(s + 100)}$$

Felhasználva:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_1}+\cdots+\frac{r_n}{s-p_n}$$

$$r_n=\left[(s-p_n)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=p_n}$$

$$r_1=\left[(s+20)\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)}\right]_{s=-20}=-13{,}1579$$

$$r_2=\left[(s+1)\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)}\right]_{s=-1}=10{,}6326$$

$$r_3=\left[(s+100)\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)}\right]_{s=-100}=2{,}5253$$

Ebből:

$$y(s)=-\frac{13{,}1579}{s+20}+\frac{10{,}6326}{s+1}+\frac{2{,}5253}{s+100}$$

$$y(t)=-13{,}1579e^{-20t}+10{,}6326e^{-t}+2{,}5253e^{-100t}$$

b.,

A megoldáshoz ismételten a kimeneti jel Laplace transzformáltjának részlettörtekre bontásával jutunk. Az egységimpulzus u(t) = ε(t) bemeneti jel Laplace transzformáltja u(s) = 1/s.

$$y(s)=w(s)u(s)=\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)}\cdot\frac{1}{s}$$

A függvényhez itt az eddigi három mellé egy negyedik $p_4 = 0$ pólus jön hozzá. Felhasználva:

$$r_n=\left[(s-p_n)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=p_n}$$

$$r_1=\left[(s+20)\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)s}\right]_{s=-20}=0{,}6579$$

$$r_2=\left[(s+1)\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)s}\right]_{s=-1}=-10{,}6326$$

$$r_3=\left[(s+100)\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)s}\right]_{s=-100}=-0{,}0253$$

$$r_4=\left[(s+0)\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)s}\right]_{s=0}=10$$

Ebből:

$$y(s) = \frac{0{,}6579}{s+20} - \frac{10{,}6326}{s+1} - \frac{0{,}0253}{s+100} + \frac{10}{s}$$

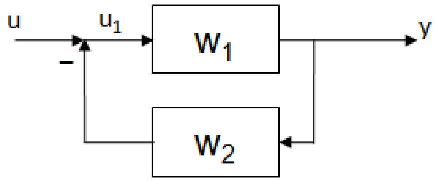
$$y(t) = 0{,}6579e^{-20t} - 10{,}6326e^{-t} - 0{,}0253e^{-100t} + 10$$

3. Feladat

Az ábrán egy zárt szabályozási rendszer hatásvázlatát látjuk.

$$w_1(s) = \frac{1000}{(s^2 + 101s + 100)}$$

$$w_2(s) = \frac{20}{(s+20)}$$



Adja meg

a) zárt kör w(s) = y(s)/u(s) átviteli függvényét
b) a felnyitott kör pólusait: $z_1, z_2 \dots z_n; p_1, p_2 \dots p_n = ?$
c) a felnyitott kör amplitúdó menetének töréspontos közelítését
d) közelítőleg a rendszer fázistöbbletét!

a.,

A zárt kör átviteli függvénye:

$$w = \frac{w_1}{1 + w_1 w_2} = \frac{\dfrac{1000}{(s^2 + 101s + 100)}}{1 + \dfrac{1000}{(s^2 + 101s + 100)} \cdot \dfrac{20}{(s+20)}} = \frac{1000s + 20000}{s^3 + 121s^2 + 2120s + 22000}$$

b.,

A felnyitott kör átviteli függvénye:

$$w_0(s) = w_1(s) w_2(s) = \frac{20000}{(s^2 + 101s + 100)(s+20)}$$

A felnyitott körnek nincsen zérusa. A w_0 függvényből egy pólus rögtön meghatározható: $p_1 = -20$. Az

$$s^2 + 101s + 100 = 0$$

egyenlet megoldásából a további két pólus is adódik:

$p_2 = -1$ $p_3 = -100$

c.,

A töréspontos közelítéshez az időállandós alakra lesz szükség:

$$w_0(s) = \frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)} = \frac{20}{20}\cdot\frac{100}{100}\frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)}$$

$$= \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{20000}{(s+1)(0{,}05s+1)(0{,}01s+1)} = \frac{10}{(s+1)(0{,}05s+1)(0{,}01s+1)}$$

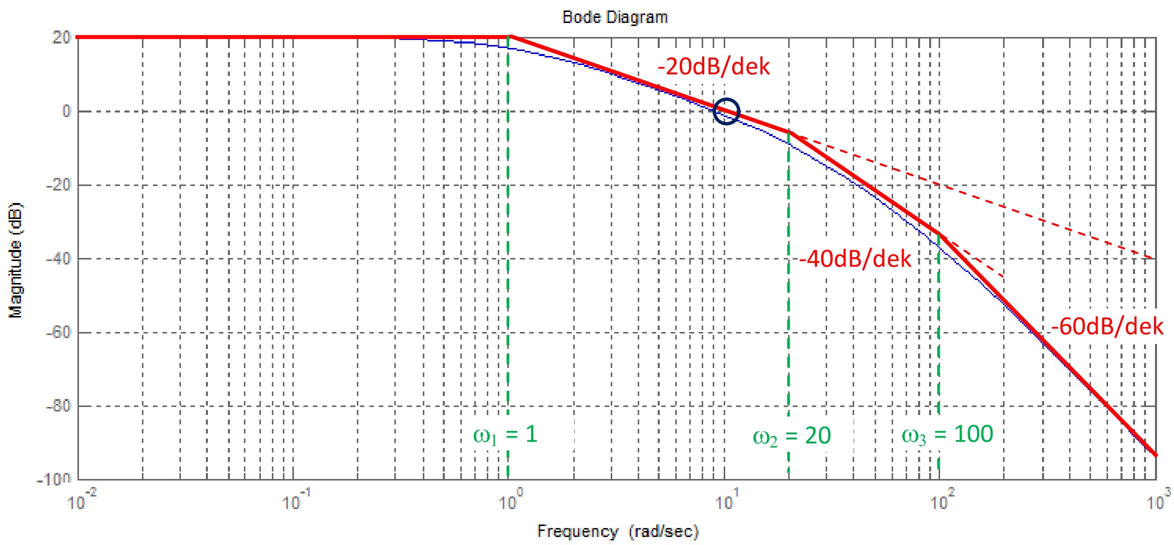
s = jω = 0 helyettesítéssel:

$$w_0(0) = 10 \qquad \longrightarrow \qquad a_{[dB]}(0) = 20lg10 = 20dB$$

A három törésponti frekvencia:

ω_1 = 1 rad/sec $\qquad$ ω_2 = 20 rad/sec $\qquad$ ω_3 = 100 rad/sec

- 0-tól ω_1–ig 20dB-es erősítés
- ω_1–től ω_2–ig -20dB/dekádos meredekségű szakasz
- ω_2–től ω_3–ig -40dB/dekádos meredekségű szakasz
- ω_3–tól -60dB/dekádos meredekségű



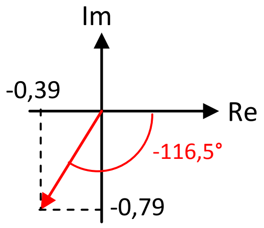
d.,

A közelítő diagram kb. 10^1 = 10 rad/sec-nál metszi a 0dB-es tengelyt. ω = 10 rad/sec-nál a fázisszög:

$$w_0(s) = \frac{20000}{s^3 + 121s^2 + 2120s + 2000}$$

$$w_0(s = j\omega = 10j) = \frac{20000}{(10j)^3 + 121(10j)^2 + 2120(10j) + 2000} = -0{,}3960 - j0{,}7921$$

Ebből:



A fázistartalék tehát kb: -116,5+180 = 63,5°